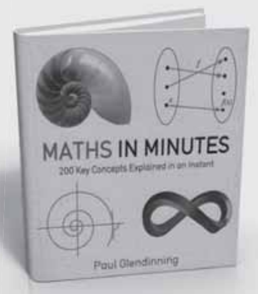
تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضاَ یاسی‌پور

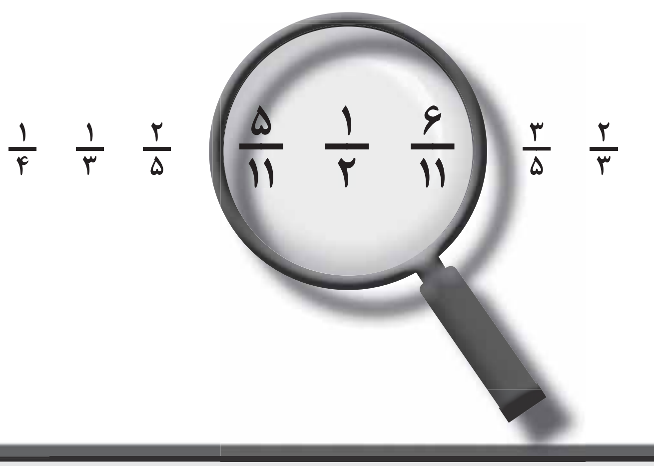
ریاضیات در چند دقیقه



مجموعه‌های چگال

با ویژگی «چگال بودن» می‌توان روابط بین مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌های آن‌ها را، زمانی که مفهومی از فاصلهٔ بین اعضای مجموعه‌ها وجود دارد، توصیف کرد. این ویژگی طریق ارزیابی از «اندازهٔ» نسبی مجموعه‌های متناهی مختلفی را به‌دست می‌دهد که با شمارش اعضا تفاوت دارد. به‌عنوان نمونه، یک راه برای معنی ریاضی داشتن این مفهوم که اعداد گویا مجموعه‌ای «بسیار بزرگ»اند، این است که آن‌ها در زیرمجموعه‌ای خاص ـ در این حالت اعداد حقیقی ـ که خودشان «بسیار بزرگ»اند، *چگال* (dense) هستند.

می‌گوییم مجموعهٔ X در مجموعهٔ دیگر Y چگال است، اگر X زیرمجموعه‌ای از Y باشد و هر نقطه در X یا عضوی از Y باشد، یا به‌طور دلخواه نزدیک به عضوی از آن باشد. یعنی به ازای هر نقطهٔ واقع در Y بتوانیم هر فاصلهٔ dی بزرگ‌تر از صفری را انتخاب کنیم و نقطه‌ای در X در فاصلهٔ d از آن نقطه بیابیم.



برای مثال، به منظور اثبات اینکه گویاها در حقیقی‌ها چگال‌اند، فاصلهٔ d و عدد حقیقی y را انتخاب می‌کنیم. آن‌گاه ثابت می‌کنیم که همواره عدد گویای xی در فاصلهٔ d از y موجود است که بتواند با تقریب زدن بسط دهدهی y تولید شود.

مجموعه‌های ناشمارا

مجموعه‌های ناشمارا مجموعه‌هایی نامتناهی هستند که اعضای آن‌ها را نمی‌توان در ترتیب شمارایی مرتب کرد. وجود چنین مجموعه‌هایی بدان معنی است که دست‌کم دو نوع مجموعهٔ نامتناهی، یعنی شمارا و ناشمارا موجودند و آشکار می‌شود که بی‌نهایت انواع متفاوت از مجموعه‌های ناشمارا وجود دارد.

اما چگونه می‌توان اثبات کرد که مجموعه‌ای شمارا است؟ در سال ۱۸۹۱، **ژرژ کانتور** (Georg Cantor)، ریاضی‌دان آلمانی، برای نشان دادن اینکه مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ ناشماراست، از اثباتی با به‌کار بردن تناقض استفاده کرد. وی چنین استدلال کرد که اگر این مجموعه شمارا باشد، در این صورت فهرستی نامتناهی اما شمارا از اعضای آن وجود دارد که هر یک از آن‌ها می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$0.a_1a_2a_3a_4...$

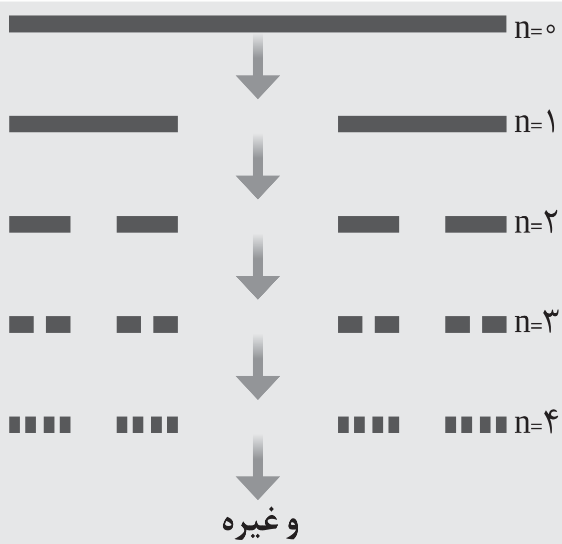
که در آن هر رقم a_k عدد طبیعی بین ۰ و ۹ است.

کانتور نقیض این گزاره را با نشان دادن این موضوع به‌دست آورد که همواره ساختن عددی حقیقی بین ۰ و ۱ که در این فهرست نباشد، موجود است.

مجموعه‌های کانتور

مجموعه‌های کانتور قدیمی‌ترین ظهور اشیایی معروف به «فرکتال‌ها» هستند. استدلال قطری‌ای که توسط **ژرژ کانتور** (Georg Cantor) گسترش یافت، نشان می‌دهد که بازه‌های خاصی از خط اعداد حقیقی، مجموعه‌هایی ناشمارایند. اما آیا جمیع مجموعه‌های ناشمارا شامل چنین بازه‌های خطی هستند؟ کانتور نشان داد ممکن است مجموعه‌ای ناشمارا بسازیم که شامل هیچ بازهٔ خطی نباشد. مجموعه‌های کانتور به گونه‌ای *نامتناهی* درهم *تنیده‌اند*؛ یعنی ساختاری مبتنی بر مقیاس‌های ظریف‌تر و ظریف‌تر دارند.

یک مثال در این مورد «*مجموعهٔ وسط سوم کانتور*» (middle third Cantor set) است. این مجموعه با بازه‌ای آغاز می‌شود و حاصل حذف یک‌سوم‌های وسط از جمیع بازه‌هایی است که در هر مرحله باقی می‌ماند. این مجموعه در مرحلهٔ ساخت nام، دارای 2^n بازه هر یک به طول $\frac{1}{(3^n)}$، و کل طول $(\frac{2}{3})^n$ است. همچنان که n به بی‌نهایت میل می‌کند، تعداد نقاط داخل در آن نیز چنین می‌شود، در حالی‌که طول مجموعه به طرف صفر منقبض می‌شود. البته نشان دادن اینکه در حدّ نامتناهیِ این زیر تقسیم در واقع چیزی به‌جا می‌ماند و اثبات اینکه مجموعه ناشماراست، اندکی کار بیشتر می‌طلبد، اما می‌تواند انجام گیرد.



ساخت مجموعهٔ کانتور

کار را با بازهٔ واحد بسته، اعداد حقیقی بین ۰ و ۱، از جمله نقاط انتهایی آغاز می‌کنیم، و یک سوم وسط را حذف کنیم و دو بازهٔ بسته به طول $\frac{1}{3}$، از جمله نقاط انتهایی‌شان را، به‌جا می‌گذاریم. اکنون یک‌سوم وسط هر یک از این بازه‌ها را حذف می‌کنیم. به این ترتیب چهار (2^2) بازهٔ بسته، هر یک به طول $\frac{1}{9}(\frac{1}{3^2})$ خواهیم داشت. فرایند مورد بحث را به‌طور نامتناهی تکرار می‌کنیم.